Osnovi informatike i računarstva

Matematičke osnove računara

Osnovni objekti koji se pamte i obrađuju u računarskom sistemu su brojevi. Brojevi su osnova funkcionisanja i korišćenja računara na svim nivoima, počev od nivoa digitalnih logičkih kola, do obrade na korisničkom nivou. Brojevi se koriste ne samo u aritmetičkim operacijama, već se i same računarske instrukcije prikazuju kao nizovi brojeva. Specijalni znaci-simboli takođe se kodiraju kao brojevi. Na početku izučavanja brojeva koji se koriste u računaru, treba najpre razmotriti strukturu brojnih sistema.

Brojni sistemi

Brojni sistem predstavlja način prikazivanja bilo kog broja pomoću niza simbola koji se nazivaju cifre brojnog sistema, no, istovremeno, on predstavlja i skup pravila po kojima se realizuju osnovne operacije nad brojevima. Skup pojedinih cifara koje se mogu prikazati u računaru jedna je od komponenti njegovog brojnog sistema. Moderni računari koriste binarni brojni sistem, koji ima samo dve cifre: 0 i 1. Binarni sistem je izabran, jer računar mora biti sposoban da prika`e bilo koju cifru na jedinstven na~in, a postoji veliki broj elektronskih sklopova koji mogu da se nalaze u dva jedinstvena stabilna stanja. Ova stanja mogu biti: otvoren-zatvoren, visok-nizak, levo-desno, ili uključen-isključen. Mnogo je teže realizovati elektronske sklopove koji će imati tri, četiri ili više različitih stabilnih stanja. Sem toga binarni sistem je pogodan za predstavljanje jedne oblasti matematičke logike, poznate kao Bulova (*Boolean*) algebra, koja operiše sa binarnim brojevima i obezbeđuje teorijsku osnovu za razvoj osnovnih računarskih komponenti (digitalnih logičkih kola i mreža).

Postoje dve osnovne vrste brojnih sistema:

• pozicioni
•nepozicioni.

Ako jedna cifra ima uvek istu vrednost, bez obzira na kom se mestu u zapisu broja nalazi, onda je to nepozicioni sistem. Tipičan primer je rimski brojni sistem sa ciframa: I, V, X, L, C, D, M. Posmatrajmo rimske brojeve III i IX. Svaka cifra Rimskog sistema uvek označava jednu istu vrednost, u ovom primeru cifra I uvek ima vrednost jedan (1). U prvom primeru tri I imaju zajedno vrednost tri, a u drugom primeru I opet ima vrednost jedan samo se oduzima od X (deset), jer se manja cifra nalazi ispred veće.

Ako jedna ista cifra ima različite vrednosti, određene položajem cifre u nizu (cifara) koji predstavlja zapis broja, onda je to pozicioni, ili težinski brojni sistem. Posmatrajmo arapske brojeve 111, 27, i 207. Kod težinskog brojnog sistema, u prvom broju, svaka od tri jedinice ima različitu vrednost: prva s leva vredi 100 (sto), srednja 10 (deset), a desna 1 (jedan), tj. svaka pozicija ima svoju težinu. Po{to je pozicija vrlo bitna, u ovakvim sistemima nužno mora da postoji specijalna cifra NULA (0), pomoću koje se označava pozicija koja ne sadrži ni jednu cifru.

Bez nule (0) između brojeva dvadeset sedam (27) i dvesta sedam (207) ne bi bilo razlike u zapisu. Svaka pozicija ima težinu, tj. vrednost koja zavisi od baze (osnove) brojnog sistema. Mi u svakodnevnom životu koristimo sistem sa osnovom 10 - dekadni brojni sistem. Pozicioni brojni sistem ima više jedinstvenih cifara, uključujući i nulu, ali ni u jednom brojnom sistemu ne može postojati pojedinačna cifra jednaka osnovi sistema.

Baza sistema jednaka je broju različitih cifara S, a same cifre brojnog sistema su: 0,1, . . . , (S-1), a u dekadnom sistemu cifre su (0,1,2,3,4,5,6,7,8, i 9).

Osnova brojnog sistema uvek se zapisuje kao složeni broj. U dekadnom sistemu to je dvocifren broj 10, tj. sastoji se od jedinice iza koje sledi cifra nula.
U opštem slučaju, proizvoljan broj x se može u brojnom pozicionom sistemu sa osnovom S predstaviti kao suma:
$x = a_r S^r + a_{r-1} S^{r-1} + \ldots + a_1 S^1 + a_0 S^0 + a_{-1} S^{-1} + \ldots + a_{-p} S^{-p} + \ldots$
gde su: a_r , a_{r-1} , … , a_2 , a_1 , a_0 , a_{-1} , … , a_{-p} ,… cifre broja, i pripadaju skupu {0, 1, … , S-1}, tj. pripadaju grupi od S različitih cifara.

Broj x se može prikazati u sažetom obliku kao niz:

$x = a_r\, a_{r-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0 \,.\, a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-p}$

gde tačka (.) (ili zapeta (,)), odvaja ceo deo od razlomljenog dela, i pri čemu svaka cifra ai u zapisu ima neku težinu Si, zavisno od njene pozicije i, računajući levo i desno od decimalne tačke.

Podela brojnih sistema kod računara

Za unos numeričkih informacija u računar i za njihovo štampanje koriste se:

- dekadni,
- heksadekadni (heksadecimalni),
- oktalni
- binarni brojni sistemi.

U literaturi se za označavanje ovih brojnih sistema koriste skraćenice: DEC, HEX, OCT i BIN.

DEKADNI brojni sistem ima deset cifara koje uzimaju celobrojne vrednosti 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, a svaki broj x se može predstaviti kao:

$x = d_r\, 10^r + d_{r-1}\, 10^{r-1} + \ldots + d_1\, 10^1 + d_0\, 10^0 + d_{-1}\, 10^{-1} + \ldots + d_{-p}\, 10^{-p} + \ldots,$

Težinske vrednosti određene su pozicijom cifre i iznose

$10^r, \ldots 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-p}$, a $d_r, \ldots, d_0, d_{-1}, \ldots, d_{-p}$ su decimalne cifre.

Primeri decimalnih brojeva su:

$1992 = 1*10^3 + 9*10^2 + 9*10^1 + 2*10^0$,

$738{,}387 = 7*10^2 + 3*10^1 + 8*10^0 + 3*10^{-1} + 8*10^{-2} + 7*10^{-3}$.

HEKSADECIMALNI brojni sistem ima 16 cifara koje uzimaju celobrojne vrednosti od 0 do 15, pri čemu se za prikaz cifara od 10 do 15 koriste slova A,B,C,D,E,F. U ovom brojnom sistemu svaki broj se može napisati u obliku:

$x = h_r\, 16^r + \ldots + h_1\, 16^1 + h_0\, 16^0 + h_{-1}\, 16^{-1} + \ldots + h_{-p} 16^{-p} + \ldots$,

{to znači da su težinske vrednosti određene pozicijom cifre i iznose

$16^r, \ldots, 16^2, 16^1, 16^0, 16^{-1}, 16^{-2}, \ldots, 16^{-p}$, a $h_r, \ldots, h_0, h_{-1}, \ldots, h_{-p}$ su heksadecimalne cifre.

Primeri heksadecimalnih brojeva su:

$12F_{16} = 1 * 16^2 + 2 * 16^1 + 15 * 16^0 = 303_{10}$,

$1F9A.A_{16} = 1 * 16^3 + 15 * 16^2 + 9 * 16^1 + 10 * 16^0 + 10 * 16^{-1} = 8090.625_{10}$.

OKTALNI brojni sistem ima 8 cifara 0,1,2,3,4,5,6,7, tj. osnova mu je 8, a broj

se predstavlja kao:

$x = O_r\, 8^r + \ldots + O_1\, 8^1 + O_0\, 8^0 + O_{-1}\, 8^{-1} + \ldots + O_{-p} 8^{-p} + \ldots,$

gde svaka cifra O_i uzima vrednost iz skupa {0,1,2,....,6,7}, a težinska vrednost

joj zavisi od pozicije i, i iznosi 8i, kao u sledećem primeru:

$2057_8 = 2*8^3 + 0*8^2 + 5*8^1 + 7*8^0 = 1071_{10}.$

BINARNI brojni sistem takođe spada u pozicione brojne sisteme, i pri tome svaki

broj x može se prikazati samo uz pomoć dve cifre: 0 i 1, jer mu je osnova 2,

$x = b_r\, 2^r + \ldots + b_1\, 2^1 + b_0\, 2^0 + b_{-1}\, 2^{-1} + \ldots + b_{-p} 2^{-p} + \ldots.$

gde je: bi ili 0 ili 1 za svako i.

Primeri binarnih brojnih zapisa su:

$11001.1101_2 = 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 1*2^{-2} + 0*2^{-3} + 1*2^{-4} = =25.8125_{10}$.

$1101011.01_2 = 107{,}25_{10}$.

Konverzija brojeva iz jednog brojnog sistema u drugi

Konverzija brojeva iz BIN, OCT, HEX, u dekadni brojni sistem vrši se

jednostavnom operacijom sumiranja elementarnih proizvoda cifara i njihovih

težinskih vrednosti, pri čemu se čitava aritmetika izvodi u dekadnom sistemu:

$1F9A_{16} = 1*16^3 + 15*16^2 + 9*16^1 + 10*16^0 = 8090_{10}$.

$1267_{(8)} = 1*8^3 + 2*8^2 + 6*8^1 + 7*8^0 = 695_{10.}$

Konverzija dekadnih brojeva u druge brojevne sisteme

Celi brojevi

Dekadni broj x konvertuje se u broj sa osnovom S metodom sukcesivnih deljenja, preko sledećeg niza koraka:

Broj x se podeli osnovom S. Ostatak pri deljenju pamti se kao cifra najmanje težine (S_0) traženog broja sa osnovom S.

Dobijeni količnik se ponovo podeli sa S. Ostatak predstavlja cifru sa težinom S_1, traženog broja sa osnovom S.

Postupak se ponavlja sve dok rezultat deljenja ne postane jednak nuli.

Postupak konverzije celog dekadnog broja u binarni broj prikazaćemo na primeru broja 120_{10}:

120 : 2 = 60 60 : 2 = 30 30 : 2 = 15 15 : 2 = 7 7 : 2 = 3 3 : 2 = 1 1 : 2 = 0

0 0 0 1 1 1 1 *ostatak*

cifra najmanje težine ← cifra najveće težine

Niz binarnih cifara treba pročitati od kraja ka početku, od poslednjeg ostatka ka prvom, a zapisuje se u jednom od sledećih oblika:

$120_{(10)} = 1111000_{(2)}$,

$(120)_{10} = (1111000)_2$,

$120_{10} = 1111000_2$.

Dekadni broj manji od jedinice

Dekadni broj x manji od jedan ($x=0._{a-1a-2}$ ...) pretvara se u odgovarajući broj sa osnovom S metodom sukcesivnih množenja, na sledeći način:

Pomnože se broj x i osnova S. Celobrojna vrednost ovog proizvoda predstavlja cifru sa težinom S-1 traženog broja u sistemu sa osnovom S. Decimalni deo proizvoda služi za dobijanje drugih cifara.

Druga cifra sa težinom S-2 dobija se množenjem decimalnog dela iz prethodnog množenja sa osnovom S, i predstavlja celobrojnu vrednost ovog proizvoda.

Postupak se ponavlja sve dok se ne dobije tražena tačnost.
Postupak nije u opštem slučaju konačan, a prekida se kada se dobije određen broj cifara kojim se može zadovoljiti tražena tačnost predstavljanja brojeva, ili kada je dobijen ceo broj (nema deo < 1). Ovo dalje znači, da tačni dekadni decimalni brojevi nemaju tačan binarni ekvivalent, pa se moraju tražiti i drugi načini predstavljanja dekadnih brojeva. Postupak sukcesivnih množenja prikazaćemo na primeru konverzije razlomljenog dekadnog broja 0.375, u binarni brojni sistem:

	celobrojni deo
$0.375 \times 2 = 0,75$	0
$0.75 \times 2 = 1,5$	1
$0.5 \times 2 = 1,0$	1

gde je kao rezultat konverzije dobijen broj:
$(0,375)_{10} = (0,011)_2$.

Konverzija mešovitih dekadnih brojeva

Konverzija mešovitih dekadnih brojeva (ceo deo + razlomljen), vrši se tako što se ceo deo konvertuje metodom sukcesivnih deljenja, dok se razlomljen deo konvertuje metodom sukcesivnih množenja. Pri tome se ceo deo uvek pretvara u konačan niz 0 i 1, dok razlomljeni deo ne mora imati konačan prikaz, tj. njegova konverzija se ne može izvesti do kraja već sa određenom tačnošću, odnosno aproksimativno.

Konverzija BIN, OCT i HEX brojeva u druge brojne sisteme

Binarni broj se konvertuje u dekadni (BIN → DEC) već opisanim postupkom sumiranja elementarnih prozvoda binarnih cifara i njihovih težinskih koeficijenata 2i, kao u sledećem primeru:

$1101.11_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 1*2^{-2} = 13.75_{10}$.

Konverzija binarnog broja u oktalni i heksadecimalni

Konverzija binarnog broja u oktalni i heksadecimalni vrši se grupisanjem tri, odnosno četiri binarne cifre, počev od decimalne tačke ulevo i udesno. Kada se binarni broj konvertuje u oktalni (BIN → OCT), grupišu se po tri binarne cifre, i na osnovu tabele 1 određuje se odgovarajuća oktalna cifra. Ako pri grupisanju u krajnje levoj i krajnje desnoj grupi nema dovoljnog broja binarnih cifara, dopisuje se potreban broj nula (jedna ili dve).

Pri konvertovanju iz binarnog u heksadecimalni sistem (BIN → HEX), postupak je ekvivalentan, samo se prave grupe od po četiri binarne cifre, počev od decimalne tačke. Postupak konverzije ćemo prikazati na primeru binarnog broja $10111011011101.1111100010_2$:

$111011011101.1111100010_2 = 010\ 111\ 011\ 011\ 101.111\ 111\ 000\ 10\ 0 = = 27335.7704_8.$

$111011011101.1111100010_2 = 0010\ 1110\ 1101\ 1101.\ 1111\ 1100\ 010\ 0 = = 2EDD.FC4_{16}.$

Konverzija oktalnog i heksadecimalnog broja u binarni

Obzirom na činjenicu da je $8=2^3$, a $16=2^4$, to se svaka oktalna cifra može kodirati pomoću 3 binarne cifre, a heksadecimalna pomoću 4 binarne cifre, sa težinskim faktorima $P1=2^0=1$, $P2=2^1=2$, $P3=2^2=4$, a za heksadecimalne $P1=2^0=1$, $P2=2^1=2$, $P3=2^2=4$, $P4=2^3=8$. To znači da se oktalni broj pretvara u binarni(OCT → BIN), zamenom svake oktalne cifre njenim trocifrenim binarnim zapisom. Heksadecimalni broj pretvara se u odgovarajući binarni (HEX → BIN), zamenom heksadacimalnih cifara njihovim četvorocifrenim binarnim ekvivalentom. U tabeli 1 dati su binarni kodovi, oktalnih, heksadecimalnih i dekadnih cifara. Postupak konverzije ćemo prikazati na primeru oktalnog broja 157, i heksadecimalnog broja ABCD:

$(157)_8 = (\ 001)_2\ (101)_2\ (111)_2 = 1101111_2$,

$ABCD_{(16)} = 1010_{(2)}\ 1011_{(2)}\ 1100_{(2)}\ 1101_{(2)} = 1010101111001101_2.$

Broj	Oktalna cifra	Binarni broj	Heksa cifra	Binarni broj	Dekadna cifra	Binarni broj
0	0	000	0	0000	0	0000
1	1	001	1	0001	1	0001
2	2	010	2	0010	2	0010
3	3	011	3	0011	3	0011
4	4	100	4	0100	4	0100
5	5	101	5	0101	5	0101
6	6	110	6	0110	6	0110
7	7	111	7	0111	7	0111
8	10	1000	8	1000	8	1000
9			9	1001	9	1001
10			A	1010	10	
11			B	1011		
12			C	1100		
13			D	1101		
14			E	1110		
15			F	1111		
16			10			

Tabela 1. Tabela binarnih kodova heksadecimalnih, dekadnih i oktalnih cifara

Konverzija oktalnih brojeva u heksadecimalni i obratno

Konverzija oktalnih brojeva u heksadecimalne i obratno vrši se preko binarnog sistema (OCT → BIN → HEX; HEX → BIN → OCT). Najpre se svaka oktalna cifra zameni sa tri binarne, a zatim se počev od decimalne tačke ulevo i udesno grupišu po četiri binarne cifre. Svakoj grupi odgovara po jedna heksadecimalna cifra. Pri konvertovanju heksadecimalnih brojeva u oktalne, najpre se svaka heksacifra zameni sa četiri binarne (kao u tabeli), a zatim se počev od decimalne tačke grupišu po tri binarne cifre. Svakoj grupi od tri binarne cifre odgovara po jedna oktalna. Postupak ćemo prikazati na primeru konverzije oktalnog broja 127.15_8 u heksadecimalni:

$127.15_8 = 001\ 010\ 111.001\ 101_2 = 0101\ 0111.0011\ 0100_2 = 57.34_{16}$.